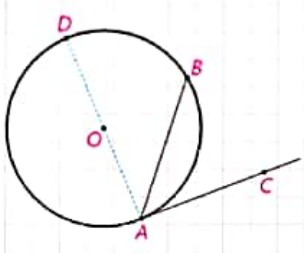


اثبات: از  $A$  ، قطر  $AD$  را رسم می کنیم در این صورت  $\hat{DAC} = 90^\circ$  و در نتیجه  $\hat{DAC} = \frac{1}{2} \hat{AD}$  (۱) از طرفی زاویه  $DAB$  یک زاویه محاطی است. در

نتیجه:  $\hat{DAB} = \frac{1}{2} \hat{DB}$  (۲)

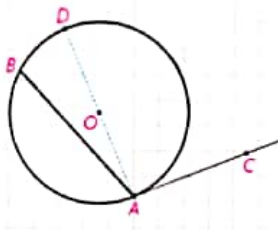
$$(1)-(2) \Rightarrow \hat{DAC} - \hat{DAB} = \frac{1}{2} (\hat{AD} - \hat{DB}) \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{1}{2} \hat{AB}$$



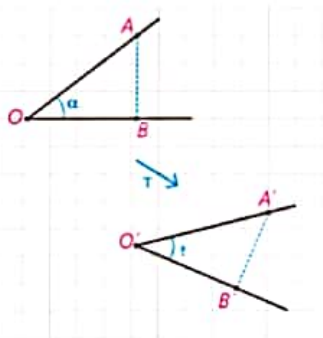
۲- اگر زاویه ظلّی منفرجه باشد:

اثبات:  $\hat{DAC} = 90^\circ$  و در نتیجه  $\hat{DAC} = \frac{1}{2} \hat{AD}$  (۱) از طرفی زاویه  $DAB$  یک زاویه محاطی است. در نتیجه:  $\hat{DAB} = \frac{1}{2} \hat{DB}$  (۲)

$$(1)+(2) \Rightarrow \hat{DAC} + \hat{DAB} = \frac{1}{2} (\hat{AD} + \hat{DB}) \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{1}{2} \hat{AB}$$



ب) می خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولیا اندازه زاویه را حفظ می کند. فرض کنید  $T$  تبدیلی طولیاست.



$\hat{AOB} = \alpha$  و  $T(O) = O'$  و  $T(B) = B'$  و  $T(A) = A'$  حال دو مثلث  $AOB$  و  $A'O'B'$  را در نظر می گیریم:

$$AB = A'B'$$

$$OA = O'A' \Rightarrow \hat{AOB} \cong \hat{A'O'B'} \Rightarrow \hat{AOB} = \hat{A'O'B'} = \alpha$$

$$OB = O'B'$$

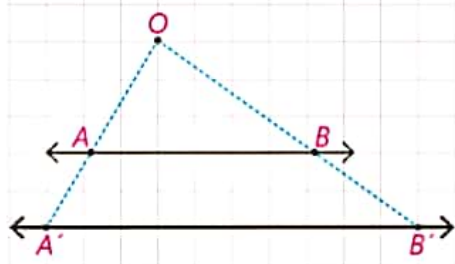
ج) دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

(۱) نقطه  $O$  روی خط  $AB$  است.

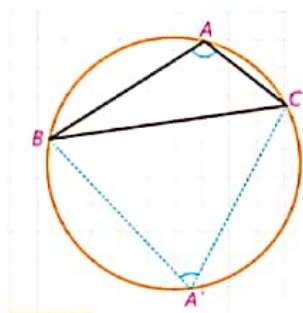
در این حالت بدیهی است که نقاط  $A'$  و  $B'$  مجانس های نقاط  $A$  و  $B$  روی خط  $AB$  واقع می شوند، بنابراین  $A'B'$  بر  $AB$  واقع است و شیب خط تغییری نمی کند.

(۲) نقطه  $O$  غیر واقع بر خط  $AB$  است. در این صورت اگر نقاط  $A'$  و  $B'$  به ترتیب مجانس های  $A$  و  $B$  باشند، طبق تعریف داریم:

در نتیجه:  $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K$  بنابراین  $AB \parallel A'B'$ . پس در این حالت نیز خط و تصویرش با هم موازیند و شیب دو خط با هم برابر است.



(د) اثبات: نقطه دلخواه  $A'$  روی کمان  $BC$  را به  $B$  و  $C$  وصل می کنیم. زوایای  $\hat{A}$  و  $\hat{A}'$  نسبت به هم مکمل هستند چون:



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BA'C}}{2}, \hat{A}' = \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BA'C}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{360}{2} = 180 \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = 180$$

بنابراین زاویه  $\hat{A}'$  حاده است. از طرفی:  $\sin A = (180^\circ - A') = \sin \hat{A}'$  در مثلث  $A'BC$  بنا بر قضیه ای داریم:  $\frac{a}{\sin A'} = 2R$  در نتیجه:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

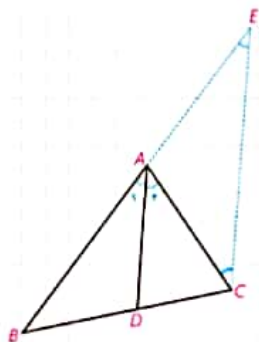
(ه) اثبات: از نقطه  $C$  خطی موازی نیمساز  $AD$  رسم می کنیم تا امتداد  $AB$  را در نقطه  $E$  قطع کند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} AD \parallel EC &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \\ AD \parallel EC &\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} \end{aligned}$$

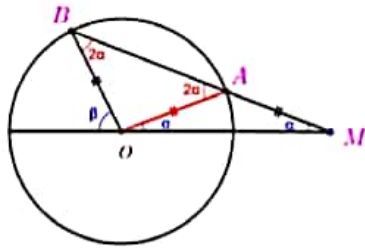
در نتیجه چون  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  بنابراین:  $\hat{E} = \hat{C}$ . در این صورت مثلث  $AEC$  متساوی الساقین است.

از طرفی طبق قضیه تالس در مثلث  $EBC$  ( $AD \parallel EC$ ) داریم:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



۵- با توجه به فرض مسئله، مثلث های  $OAB$  و  $OAM$  متساوی الساقین هستند. در مثلث  $OBM$  داریم:  $\beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$



۶-

$$TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \Rightarrow 36 = 45 - (R - R')^2 \Rightarrow R - R' = 3$$

$$TT'^2 = d^2 - (R + R')^2 \Rightarrow 11 = 36 - (R + R')^2 \Rightarrow R + R' = 5$$

$$\Rightarrow R = 4, R' = 1$$

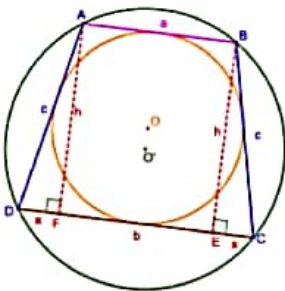
۷- چون دوزنقه  $ABCD$  محاطی است، پس متساوی الاضلاع است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است. در نتیجه  $2b = a + b$  و مثلث  $ADF$  قائم الزاویه است.

$$2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

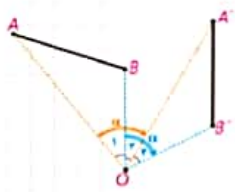
$$b = 2x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \times \sqrt{ab}$$



۸- با توجه به شکل  $\hat{AOB} = \hat{A'OB'} \Rightarrow \alpha = \alpha \Rightarrow O_1 + O_2 = O_3 + O_2 = \alpha$ . از طرفی به کمک هم نهشتی مثلث ها داریم:



$$OA = OA'$$

$$OB = OB' \quad \text{لذا دو مثلث } AOB \text{ و } A'OB' \text{ بنابه حالت ض ض ض با هم هم نهشت هستند در نتیجه: } AB = A'B'$$

$$\hat{AOB} = \hat{A'OB'}$$

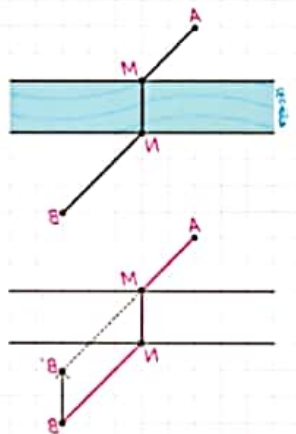
۹- الف) خیر نمی توان نقاط ثابت داشت یا به عبارتی هر نقطه باید تحت یک بردار غیر صفر در صفحه بلغزد و نمی تواند بر روی خودش بلغزد.

ب) فرض کنیم  $A_1 A_2 \dots A_n$  یک ضلعی و نقطه  $O$  مرکز تجانس و  $K$  نسبت تجانس باشد و چند ضلعی  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  مجانس آن باشد. بنا بر تعریف تجانس

داریم:  $OA'_1 = |K|OA_1$  و  $OA'_2 = |K|OA_2$  و  $\dots$  و  $OA'_n = |K|OA_n$  پس چون اضلاع همه متناسب هستند بنا

بر قضیه ۳ تشابه نتیجه می گیریم که این دو چند ضلعی متشابهند.

۱۰- نقطه  $B$  را تحت برداری مساوی وعمود بر راستای رودخانه در جهت شهر  $A$  به نقطه  $B'$  انتقال می دهیم. سپس از  $B'$  به  $A$  وصل می کنیم تا نقطه  $M$  به دست آید. از نقطه  $M$  بر رودخانه عمود می کنیم تا نقطه  $N$  به دست آید. به این ترتیب محل احداث پل  $MN$  به دست آید به طوری که مسیر  $AMNB$  کوتاه ترین مسیر است.  $AMB'B = AM + MB' + B'B \Rightarrow AM + NB + MN = AMNB$

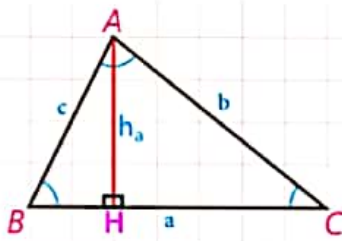


-۱۱

$bc = ah_a \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$  و  $S = \frac{1}{2} bc$  دو طرف را به توان دو می رسانیم.

$$(bc)^2 = (ah_a)^2 \Rightarrow b^2 c^2 = a^2 h_a^2 \Rightarrow b^2 c^2 = (b^2 + c^2) h_a^2 \Rightarrow b^2 c^2 = b^2 h_a^2 + c^2 h_a^2 + \underline{b^2 c^2 h_a^2}$$

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$



۱۲- به کمک قضیه کسینوس ها طول ضلع خواسته شده را به دست می آوریم.  $OA = 60 \times 0.5 = 30, OB = 100 \times 0.5 = 50$

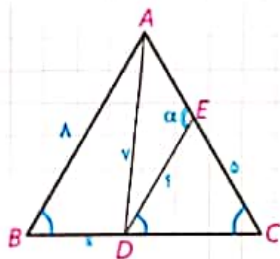
$$BC^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \Rightarrow$$

$$AB = 70km$$

$$7^2 = x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \cos 60^\circ \Rightarrow 49 = x^2 + 64 - 8x \Rightarrow$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 3, \underline{BD < DC}, BD = 3, DC = 5$$
 -۱۳

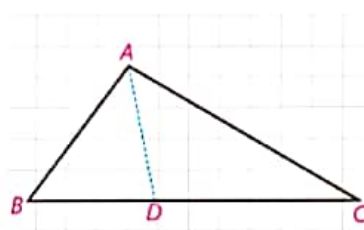
چون  $DC = CE = 5$  در نتیجه مثلث  $\triangle DCE$  متساوی الساقین است و چون یک زاویه  $60^\circ$  درجه دارد پس متساوی الاضلاع است یعنی  $DE = 5$ .



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BD + CD}{CD} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{8}{CD} = \frac{9}{5} \Rightarrow CD = \frac{40}{9}$$

-۱۴

$$BD = 8 - \frac{40}{9} = \frac{32}{9}$$



۱۵- با توجه به این که مثلث  $\triangle ADE$  متساوی الساقین است پس  $\angle DAE = 60^\circ$  در نتیجه:

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$

