نام و نام خانوادگی :	باسمه تعالی	تاریخ آزمون : ۹۴/۱۰/۱۶
سئوالات امتحان درس :جبر واحتمال	مدیریت آموزش و پرورش ناحیه۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه :سوم	دبیرستان غیردولتی هدی (دوره‌ی دوم)	شماره صندلی :
رشته :ریاضی	آزمون نوبت اول سال تحصیلی ۹۵-۹۴	
نام دبیر :خانم قاسمی	تعداد صفحه : ۳ تعداد سئوال: ۱۶	

تاریخ تصحیح: / /۹۴ نمره : با عدد ( ) نمره با حروف : ( ) امضای دبیر :

ردیف	شرح سوالات	بارم
۱	برای هرعدد طبیعی n بااستفاده از اصل استقراء ثابت کنید. $3^{3n}-1$ بر 13 بخش پذیراست.	۱/۵
۲	برای هر دو عدد حقیقی y,x ثابت کنید. $y^2+1 \geq 2x(y-x+1)$	۱
۳	بااستدلال استنتاجی ثابت کنید:مجموعه سه عدد فردمتوالی مضرب سه است.	۱
۴	هر کدام از احکام زیر که درست است را ثابت کرده و برای هر کدام که نادرست است مثال نقض بیاورید الف : اگر A×B=Ø آنگاه A=Ø و B=Ø. ب : استدلال ....روش نتیجه گیری کلی برمبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است. ج :احکامی که همیشه برقرار هستند را .... می نامیم.	۱/۵
۵	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید هرگاه nعددی طبیعی و n^2 فرد باشد, آنگاه n نیز فرد است.	۱

۶	**با روش برهان خلف ثابت کنید.** **الف: $\sqrt{3}$ گنگ است.** **ب: بااستفاده از گنگ بودن $\sqrt{3}$ ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ نیز گنگ است.**	۱/۵
۷	**مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که دو مجموعه $A=\{9, 2x+y\}$ و $B=\{13, 3x-6y\}$ مساوی باشند.**	۱
۸	**از ۸۵۰ دانش آموز یک مدرسه حداقل چند نفر در یک ماه از سال متولد شده اند؟**	۰/۷۵
۹	**اگر $A=\{4^x \mid x\in Z, -1\le x\le 1\}$, $B=\{x \mid x\in Z, x^2\le 3\}$ عضوهای مجموعه ی $A\times B-A^2$ را مشخص کنید.**	۱/۷۵
۱۰	**ده نقطه درون یک مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ قرار دارندنشان دهید که حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنهاکمتر از ۲ است.**	۱/۵

۱۱	**نمودار رابطه $R=\{(x,y)\in R^2 \mid y\le 3, y\ge -2x+x^2\}$ رارسم کنید وبیشترین مقدار $x+y$ را بدست آورید.**	۱/۵
۱۲	**گزاره های زیر را به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید.** **الف :** $(B-A)\cup(A\cap B)=B$ **ب:** $(A\cup B)'=A'\cap B'$	۲
۱۳	**اگر دو عضو به اعضای مجموعه A اضافه کنیم ، تعداد زیر مجموعه های آن ۲۴ واحد افزایش می یابد ، A دارای چند زیر مجموعه ی دو عضوی می باشد ؟**	۱
۱۴	**اگر** $A_i=\left[\frac{-2}{i},\frac{3i+1}{2}\right)$ **آنگاه** $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$ **و** $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ **بیابید.**	۱/۵
۱۵	مجموعه توانی مجموعه $A=\{\phi,a,\{b\}\}$ چند عضو دارد .	۰/۵
۱۶	ثابت کنید برای C,B,A اگرداشته باشیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه : $A\subseteq C$	۱

پاسخنامه آمار و احتمال ۱۶ / ۱۰ / ۹۴

۱)

$3^{3n}-1 = 13A$

$n=1 \Rightarrow 3^3-1 = 26 = 2\times 13$ ✓

$n=k \Rightarrow 3^{3k}-1 = 13A_1$ فرض استقراء

$n=k+1 \Rightarrow 3^{3(k+1)}-1 = 13A_2$ حکم استقراء ۰/۷۵

$3^{3k+3}-1 = 13A_2$

دو طرف فرض را در 3^3 ضرب می‌کنیم

$3^3(3^{3k}-1) = 3^3\times 13A_1$ ۰/۲۵

$3^{3k+3}-27 = 27\times 13A_1 \Rightarrow 3^{3k+3}-1 = 26+27\times 13A_1$ ۰/۲۵

$\Rightarrow 3^{3(k+1)}-1 = 13\underbrace{(2+27A_1)}_{A_2} \Rightarrow 3^{3(k+1)}-1 = 13A_2$

پس به ازای هر عدد طبیعی n داریم

۰/۲۵ $3^{3n}-1 = 13A$

---

۲)

$y^2+1 \geqslant 2x(y-x+1) \iff y^2+1 \geqslant 2xy-2x^2+2x$ ۰/۲۵

$\iff y^2+1-2xy+2x^2-2x \geqslant 0$ ۰/۲۵

$\iff (y^2-2xy+x^2)+(x^2-2x+1) \geqslant 0$ ۰/۲۵

$\iff (y-x)^2+(x-1)^2 \geqslant 0$ ۰/۲۵

این رابطه همواره برقرار است. رابطه همیشه درست است.

---

۳)

$2x+1 \,,\, 2x+3 \,,\, 2x+5$ ۰/۲۵

$2x+1+2x+3+2x+5 = 6x+9 = 3\underbrace{(2x+3)}_{A} = 3A$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

---

۴) الف) نادرست. ۰/۵ $A=\{1,2\} \,,\, B=\emptyset \Rightarrow A\times B=\emptyset$

ب) استقرایی ۰/۵ ج) قضایای کلی ۰/۵

---

۵)

$n^2=2k+1$ فرض $\Longrightarrow$ $n=2k'+1$ حکم

برهان خلف: فرض کنیم n فرد نیست پس زوج است. ۰/۲۵

$n=2k' \Rightarrow n^2=4k'^2$ ۰/۲۵ $\Rightarrow n^2=2(2k'^2)$ ۰/۲۵ $\Rightarrow n^2=2k$ ۰/۲۵

به تناقض رسیده‌ایم پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۶) برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt{3}$ گنگ نباشد پس گویاست.

$$Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in Z \ , b\neq 0 \quad (a,b)=1\right\}$$ ۰/۵

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b} \Rightarrow (\sqrt{3})^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 3=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 3b^2=a^2 \quad ①$$

$$\xrightarrow{a \text{ زوج}} a=3k \Rightarrow a^2=9k^2 \quad ② \qquad ①,② \Rightarrow 9k^2=3b^2 \Rightarrow$$

$3k^2=b^2 \Rightarrow$ ۳ مضرب b^2 $\Rightarrow$ ۳ مضرب b است $\Rightarrow b=3k'$, $a=3k$ به تناقض

رسیدیم پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. ۰/۵

ب) فرض: $\sqrt{3}$ گنگ حکم: $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ گنگ

برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ گنگ نباشد پس گویاست در نتیجه داریم $(a,b)=1$. ۰/۲۵

$$\sqrt{\sqrt{3}+1}=\frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3}+1=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}-1$$ ۰/۵

$$\sqrt{3}=\frac{a^2-b^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a'}{b'}$$ ✗ ۰/۲۵

به تناقض رسیدیم پس برهان خلف باطل و حکم درست می‌باشد.

---

۷) $A=\{9 \ , \ 2x+y\}$ $\qquad B=\{13 \ , \ 3x-6y\}$

$$6\left\{\begin{array}{l} 2x+y=13 \\ 3x-6y=9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 12x+6y=78 \\ 3x-6y=9 \end{array}\right.$$ ۰/۲۵

$$15x=87 \Rightarrow \boxed{x=\frac{87}{15}=\frac{29}{5}}$$ ۰/۲۵

$$2x+y=13 \Rightarrow y=13-\frac{2\times 87}{15}$$ ۰/۲۵ $$y=13-\frac{58}{5}=\frac{65-58}{5}$$

$$\boxed{y=\frac{7}{5}}$$ ۰/۲۵

---

۸) تعداد لانه = ۱۲ ۰/۲۵

تعداد کبوترها = ۸۵۰

$$\begin{array}{r|l} 850 & 12 \\ \underline{84} & 7 \\ 10 & \end{array}$$ ۰/۲۵

$7+1=8$ ۰/۲۵

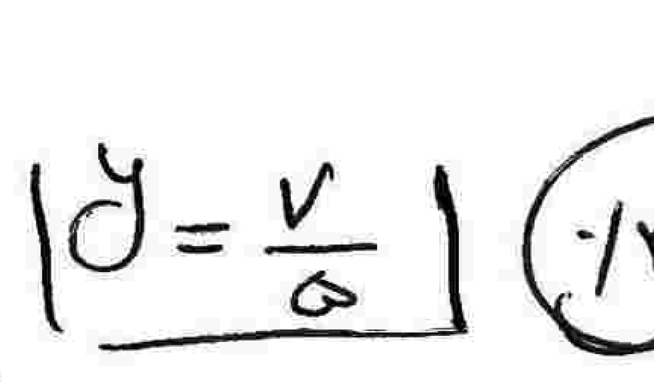
حداقل ۸ نفر در یکی از ماه‌های سال متولد می‌شوند. ۰/۲۵

---

۱۰) تعداد لانه = ۹ ۰/۵

تعداد کبوتر = ۱۰

$$\left.\begin{array}{l} x<L \\ L=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x<2$$ ۰/۵



هر ضلع مثلث را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و مطابق شکل به هم وصل می‌کنیم ۰/۵

۹ مثلث متساوی‌الاضلاع (لانه) هستند بنا بر اصل لانه کبوتری در یکی از مثلث‌ها دو نقطه قرار دارد.

۹) $A=\{۴^x \mid x\in Z \quad -۱\le x\le ۱\} = \{۴^{-۱}, ۴^{۰}, ۴^{۱}\} = \{\frac{۱}{۴}, ۱, ۴\}$ ۰/۷۵

$B=\{x \mid x\in Z \quad x^۲\le ۳\} = \{x \mid x\in Z \quad -\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳}\} = \{-۱, ۰, ۱\}$ ۰/۲۵

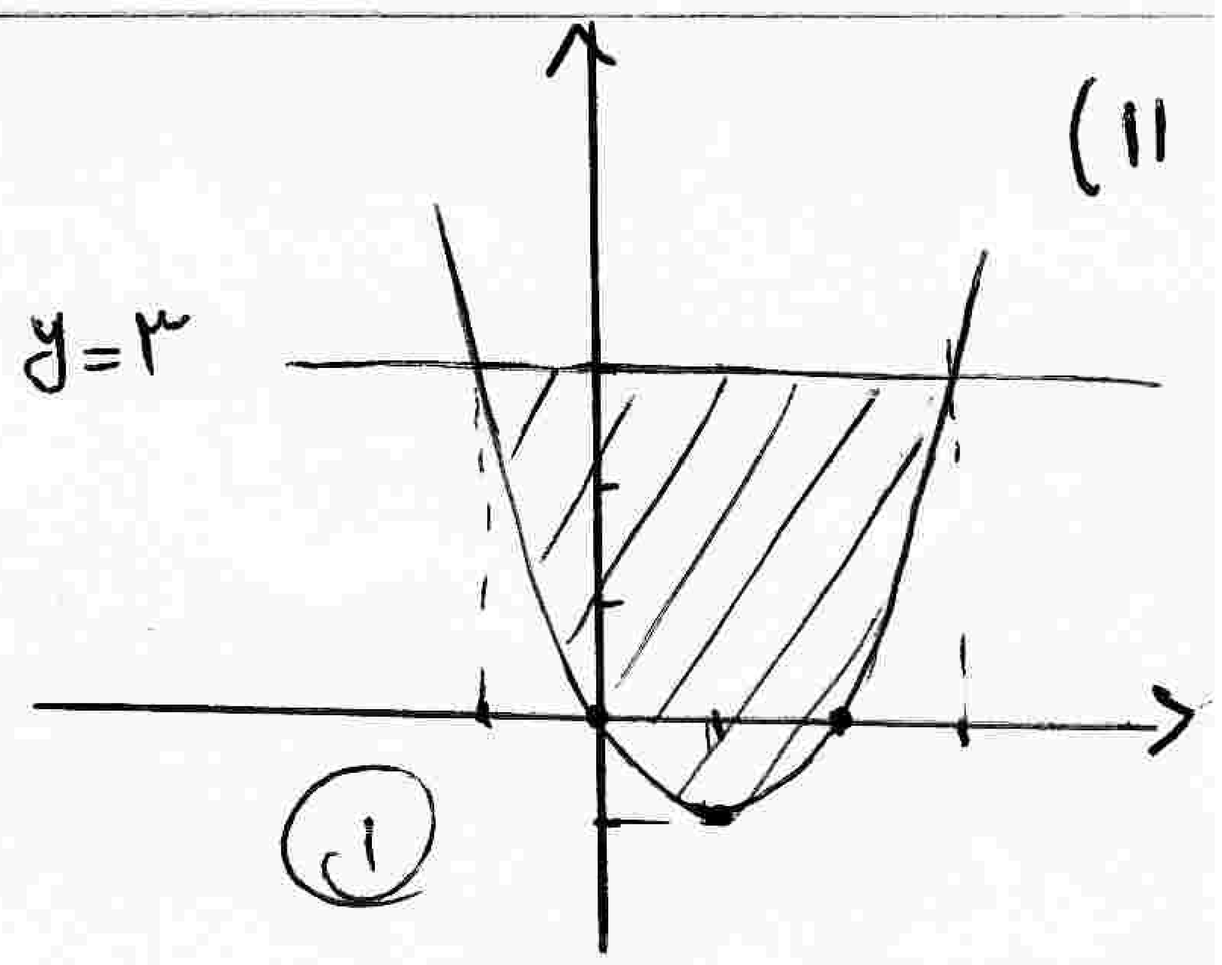
$A^۲ = \{(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۴},۱)(\frac{۱}{۴},۴)(۱,\frac{۱}{۴})(۱,۱)(۱,۴)(۴,\frac{۱}{۴})(۴,۱)(۴,۴)\}$ ۰/۵

$A\times B = \{(\frac{۱}{۴},-۱)(\frac{۱}{۴},۰)(\frac{۱}{۴},۱)(۱,-۱)(۱,۰)(۱,۱)(۴,-۱)(۴,۰)(۴,۱)\}$ ۰/۵

$A\times B - A^۲ = \{(\frac{۱}{۴},-۱)(\frac{۱}{۴},۰)(۱,-۱)(۱,۰)(۴,-۱)(۴,۰)\}$ ۰/۲۵

---

۱۱) $R=\{(x,y)\in R^۲ \mid y\le ۳ \quad y\ge -۲x+x^۲\}$



$x+y = ۳+۳ = ۶$ ۰/۵

۱

---

۱۲) الف)

$(B-A)\cup(A\cap B) = B$

$(B-A)\cup(A\cap B) = (B\cap A')\cup(A\cap B) = B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U} = B\cap U$

قانون تفاضل ۰/۲۵ — قانون پخش‌پذیری ۰/۲۵ — ۰/۲۵

$= B$ ۰/۲۵

ب) باید ثابت کنیم

$(A\cup B)' = A'\cap B' \Longrightarrow \begin{cases} (A\cup B)' \subset A'\cap B' & ① \\ A'\cap B' \subset (A\cup B)' & ② \end{cases}$

① $x\in(A\cup B)' \Longrightarrow x\notin A\cup B$ ۰/۵ $\Longrightarrow \begin{cases} x\notin A \\ , \\ x\notin B\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\in A' \\ , \\ x\in B'\end{cases}$ ۰/۵ $\Longrightarrow x\in A'\cap B'$

$(A\cup B)'\subset A'\cap B'$ ③

② $x\in A'\cap B' \Longrightarrow \begin{cases} x\in A' \\ , \\ x\in B'\end{cases}$ ۰/۵ $\Longrightarrow \begin{cases} x\notin A \\ , \\ x\notin B\end{cases} \Longrightarrow x\notin A\cup B$ ۰/۵

$\Longrightarrow x\in(A\cup B)' \Longrightarrow A'\cap B'\subseteq(A\cup B')$ ④

③ , ④ $\Longrightarrow (A\cup B)' = A'\cap B'$

۱۳)

تعداد اعضای $A = n$ ، تعداد زیرمجموعه های $A = 2^n$

$2^{n+2} = 2^n + 24$ ۰/۲۵ $\Longrightarrow 2^{n+2} - 2^n = 24$

$2^n \times 4 - 2^n = 24 \qquad 2^n(4-1) = 24$

$\Longrightarrow 3 \times 2^n = 24$ ۰/۲۵ $\Longrightarrow 2^n = \frac{24}{3} = 8 \qquad 2^n = 8 \Longrightarrow 2^n = 2^3 \Longrightarrow \boxed{n=3}$ ۰/۲۵

تعداد زیرمجموعه های دو عضوی $A = \binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ ۰/۲۵

---

۱۴)

$A_i = \left[\frac{-2}{i}, \frac{3i+1}{2}\right) \qquad A_1 = \left[\frac{-2}{1}, \frac{4}{2}\right) = [-2, 2)$ ۰/۲۵ $\qquad A_2 = \left[\frac{-2}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left[-1, \frac{7}{2}\right)$ ۰/۲۵

$A_3 = \left[\frac{-2}{3}, \frac{10}{2}\right) = \left[\frac{-2}{3}, 5\right)$ ۰/۲۵ $\qquad A_4 = \left[\frac{-2}{4}, \frac{13}{2}\right) = \left[\frac{-1}{2}, \frac{13}{2}\right)$ ۰/۲۵

$\bigcap_{i=1}^{4} A_i = \left[-\frac{1}{2}, 2\right)$ ۰/۲۵ $\qquad \bigcup_{i=1}^{4} A_i = \left[-2, \frac{13}{2}\right)$ ۰/۲۵

---

۱۵)

$A = \{\phi, a, \{b\}\} \qquad n(P(A)) = 2^3 = 8$ ۰/۵

تعداد زیرمجموعه های $A = 8$

---

۱۶)

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

$\forall x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C \Longrightarrow A \subseteq C$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵