«باسمه تعالی»

راهنمای تصحیح ریاضی عمومی
کلاس چهارم تجربی

تاریخ آزمون: ۹۹/۱۰/۲۴
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

به راه حلهای درست نمره تعلق می‌گیرد
«دبیرستان غیردولتی هدی»

۱) (۱/۵)

$S=\{(1,1,1)(1,1,2)(1,2,1)(1,2,2)(2,1,1)(2,1,2)(2,2,1)(2,2,2)\}$ $|S|=8$

$A=\{(1,2,1)(1,2,2)(2,1,1)(2,1,2)\}$ $|A|=4 \Rightarrow P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

الف) $A\cap B=\{(1,2,1)(2,1,2)\}$ $|A\cap B|=2$ (۰/۲۵)

$B=\{(1,1,2)(1,2,1)(2,1,2)(2,2,1)\}$ $|B|=4 \Rightarrow P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $P(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$ ناسازگار نیستند (۰/۲۵)

ب) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ ✓ $\Rightarrow$ بله مستقلند (۰/۲۵)

2.) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

۲) (۱)

$P(B|A)=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}$ (۰/۲۵)

$P(A\cup B)=\frac{1\times 3}{4\times 3}+\frac{1\times 2}{6\times 2}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ (۰/۵)

۳) (۱/۵)

$p=\frac{3}{5}$ $n=7$

$1-p=\frac{2}{5}$ $k=6$ یا 7

$\binom{7}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^1+\binom{7}{7}\left(\frac{3}{5}\right)^7\left(\frac{2}{5}\right)^0$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۴) (۱)

A ($\frac{1}{3}$): ۳ قرمز $\frac{3}{5}$، ۲ سبز $\frac{2}{5}$
B ($\frac{1}{3}$): ۴ قرمز $\frac{4}{5}$، ۱ سبز $\frac{1}{5}$
C ($\frac{1}{3}$): ۰ قرمز ۰، ۱ سبز ۱

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+0=\frac{7}{15}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۵) (۱/۲۵)

الف)

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

ب) $P(x\geq 1)=\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ (۰/۲۵)

$P(x\geq 1)=\frac{2}{3}$

۶) (۱)

الف) $y=x[x]+2x-3$ $[-1,4]$

x	$[-1,0)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	4
y	$x-3$	$2x-3$	$3x-3$	$4x-3$	$5x-3$	$6x-3$

(۰/۵)

x	-1	0
y	-4	-3

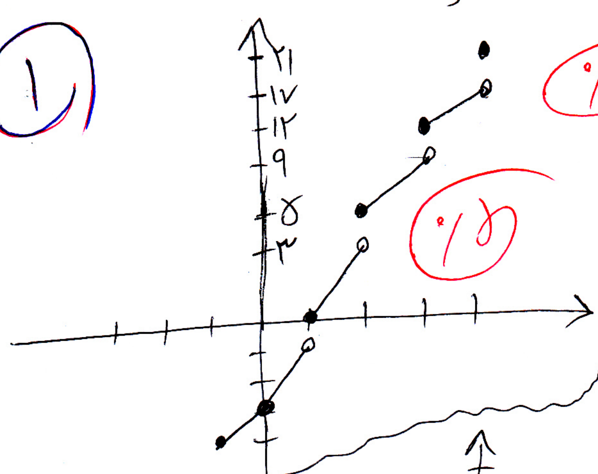
x	0	1
y	-3	-1

x	1	2
y	0	3

x	2	3
y	5	9

x	3	4
y	12	17

x	4
y	21



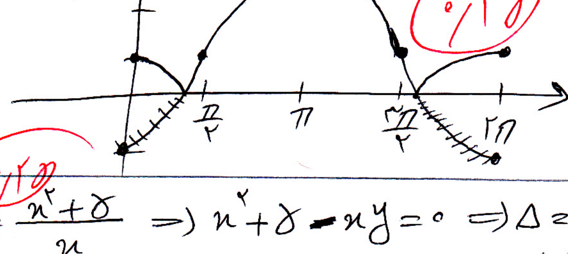
(۰/۵)

ب) $y=|-2\cos(x)+1|$ $y=-2\cos(x)+1$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	1	3	1	-1

(۰/۲۵)

(۰/۵)



(۰/۲۵)

۷) (۱)

$y=x+\frac{5}{x} \Rightarrow y=\frac{x^2+5}{x} \Rightarrow x^2+5-xy=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-y)^2-4(1)(5)=y^2-20$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Delta\geq 0 \Rightarrow y^2-20\geq 0 \Rightarrow y^2\geq 20 \Rightarrow |y|\geq 2\sqrt{5} \Rightarrow \{ y\geq 2\sqrt{5}$ یا $y\leq -2\sqrt{5}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

کمترین مقدار $2\sqrt{5}$

۸) $3x^2-8x+5=0 \qquad S=\alpha+\beta=\frac{8}{3}$ (0/25) $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$

(1)

$S'=-\alpha+7-\beta+7=-(\alpha+\beta)+14=-\frac{8}{3}+14=\frac{-8+42}{3}=\frac{34}{3}$ (0/25)

$P'=(-\alpha+7)(-\beta+7)=\alpha\beta\underbrace{-7\alpha-7\beta}_{-7(\alpha+\beta)}+49=\frac{5}{3}-7\left(\frac{8}{3}\right)+49=$ (0/25)

$\frac{5}{3}-\frac{56}{3}+49=\frac{-51}{3}+49=-17+49=32$

$x^2-\frac{34}{3}x+32=0 \Rightarrow 3x^2-34x+96=0$ (0/25)

---

۹) (1)

$102, 108, \dots, 996$ (0/25) $996=102+(n-1)\times 6 \Rightarrow \frac{804}{6}=n-1 \Rightarrow 134=n-1 \Rightarrow n=135$ (0/25)

$S_n=\frac{135}{2}(102+996)$ (0/25) $=\frac{135}{2}(1098)=135\times 549=74115$ (0/25)

---

۱۰) (1)

$512, 128, 32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$ (0/25)

$S_n=\frac{512}{1-\frac{1}{4}}$ (0/25) $=\frac{512}{\frac{3}{4}}=\frac{512\times 4}{3}$ (0/25) $=\frac{2048}{3}=682/6$ (0/25)

---

۱۱) (1/25)

الف) $[7+3x]=5 \Rightarrow$ (0/25) $[3x]+7=5 \Rightarrow [3x]=-2 \Rightarrow$ (0/25) $-2\le 3x<-1 \xrightarrow{\div 3} \frac{-2}{3}\le x<-\frac{1}{3} \Rightarrow \left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ (0/25)

ب) $\frac{7x+2}{3x-4}=\frac{8}{1} \Rightarrow$ (0/25) $24x-32=7x+2 \Rightarrow 17x=34 \Rightarrow$ (0/25) $x=2$ ق ق

---

۱۲) (1)

$a_n=\frac{3n-4}{n^2+1} \qquad \frac{-1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{10}, \frac{8}{17}, \dots, 0 \Rightarrow -0/5, 0/4, 0/5, 0/47, \dots, 0$ (0/25) همگرا (0/25)

غیر یکنوا (نه صعودی نه نزولی) (0/25) - کراندار هست (0/25) زیرا هم کران بالا و هم کران پایین دارد.

---

۱۳) (0/75)

$i=0/60 \qquad A_t=7A_0 \Rightarrow 7\cancel{A_0}=\cancel{A_0}e^{it} \Rightarrow$ (0/25) $7=e^{0/6t} \Rightarrow \ln 7=0/6t$ (0/25) $\Rightarrow t=\frac{\ln 7}{0/6}$ (0/25)

---

۱۴) اثبات یک به یک بودن (0/5) نمره، محاسبهٔ وارون (1) نمره

(1/5)

$y_1=y_2 \Rightarrow x_1=x_2$ (0/5)

$y=\frac{7^x-1}{7^x+1} \Rightarrow 7^xy+y=7^x-1 \Rightarrow$ (0/25) $7^x-7^xy=y+1 \Rightarrow 7^x(1-y)=y+1$ (0/25) $\Rightarrow 7^x=\frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x=\log_7\frac{y+1}{1-y}$ (0/25)

$y^{-1}=\log_7\frac{x+1}{1-x}$ (0/25)

---

۱۵) (1/5)

الف) $y=5\times\frac{14xe^{7x^2}-12\sin^2(9x^2)\times(18x)\cos(9x^2)}{e^{7x^2}-4\sin^3(9x^2)}$ (0/5)

ب) $f'(x,y)=\frac{-f'(x)}{f'(y)}=\frac{-\left(24\tan^3(2x^3y^5)\times(6x^2y^5)(1+\tan^2(2x^3y^5))+8(12xy)e^{6x^2y}-\frac{7y^2+6}{5\sqrt[5]{(7xy^2+6x)^4}}\right)}{24\tan^3(2x^3y^5)\times(10y^4x^3)(1+\tan^2(2x^3y^5))+8(6x^2)e^{6x^2y}-\frac{14yx+0}{5\sqrt[5]{(7xy^2+6x)^4}}}$ (0/5) (0/5)

---

۱۶) (1/25)

$f(x)=\begin{cases}x^2-3x & x<0 \text{ یا } x\ge 3\\ -x^2+3x & 0\le x<3\end{cases}$ (0/25)

$D_f=\mathbb{R} \Rightarrow$ تابع در $x=3$ پیوسته است (0/25)

$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0,\ x=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

(0/25)

(ادامهٔ جواب در صفحهٔ بعد)

«ادامه‌ی جواب‌های ریاضی سال چهارم تجربی»

(ادامه‌ی سؤال ۱۶) $f'(x)=\begin{cases} ۲x-۳ & x<۰ \ \text{یا}\ x>۳ \\ -۲x+۳ & ۰<x<۳ \end{cases}$ ۰/۲۵

$f'(۳^+)=۲(۳)-۳=۳$

$f'(۳^-)=-۲(۳)+۳=-۳$ ۰/۲۵

$\Rightarrow ۳\neq -۳$ ⇐ در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست

---

۱۷) $x=-۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y=۲\ln(۱)+۶(-۱)=-۶ \Rightarrow A(-۱,-۶)$ ۰/۲۵

$y'=۲\times\dfrac{(۶x+۳)e^{۳x^۲+۳x}+۱۲x^۲}{e^{۳x^۲+۳x}+۴x^۳+۴}+۶$ ۰/۲۵ $\Rightarrow m=\dfrac{۲(-۳)e^{۰}+۱۲}{e^{۰}+\cancel{(-۴)}+\cancel{۴}}+۶=\dfrac{۰}{۱}+۶=۰+۶=۶$ ۰/۲۵

۱/۲۵

$m=۶ \Rightarrow m'=\dfrac{-۱}{۶}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y+۶=\dfrac{-۱}{۶}(x+۱)$ ۰/۲۵

---

۱۸) $y=۰ \Rightarrow \sin(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\pi \\ x=۲\pi \end{cases}$ ۰/۲۵

$y'=\cos x$

$\cos ۰=۱ \Rightarrow m=۱ \Rightarrow \tan\alpha=۱ \Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$ ۰/۲۵

$\cos\pi=-۱ \Rightarrow m=-۱ \Rightarrow \tan\alpha=-۱ \Rightarrow \alpha=۱۳۵^\circ$ ۰/۲۵

$\cos ۲\pi=۱ \Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$

۰/۷۵